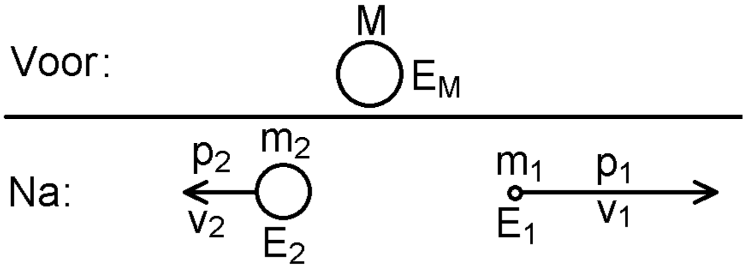
Uitgebreide opgave: Deeltje dat uiteen valt in twee deeltjes

Een stilstaand deeltje met massa M en energie E_M valt uiteen in twee deeltjes 1 en 2 die van elkaar vandaan bewegen. Deeltje 1 heeft massa m_1, snelheid v_1, impuls p_1 en (totale) energie E_1. Deeltje 2 heeft overeenkomstige grootheden met index 2. Zie de onderstaande figuur waarin deeltje 1 lichter is dan deeltje 2.



In deze opgave bewijzen we dat de verhouding van de kinetische energie van deeltje 1 en van deeltje 2 bij benadering gelijk is aan de massaverhouding van deeltje 2 en deeltje 1. We kiezen voor de relativistische aanpak.

a.
Bewijs dat uit de wet van behoud van impuls volgt: $E_2^2 = E_1^2 - m_1^2c^4 + m_2^2c^4$.
Schrijf elk stapje van je bewijs op en werk daarbij van boven naar beneden.

b.
Bewijs dat uit de wet van behoud van energie volgt: $E_2^2 = E_M^2 + E_1^2 - 2E_ME_1$.
Schrijf elk stapje van je bewijs op en werk daarbij van boven naar beneden.

c.
Bewijs nu de onderstaande formule door de bij a. en b. te bewijzen formules te combineren.

$$\frac{2Mm_1}{\sqrt{1-{v_1^2}/{c^2}}} = M^2 + m_1^2 - m_2^2 \,.$$

d.
Toon aan dat uit de bij vraag c te bewijzen formule volgt dat voor de kinetische energie $E_{K,1}$ van deeltje 1 geldt:

$$E_{K,1} = \frac{c^2}{2M} \cdot \left(M^2 + m_1^2 - m_2^2\right) - m_1 c^2 \,.$$

Uit de laatste formule volgt:

$$E_{K,1} = \frac{c^2}{2M} \cdot \left(M^2 + m_1^2 - m_2^2 - 2m_1M \right).$$

Hieruit volgt:

$$E_{K,1} = \frac{c^2}{2M} \cdot \left((M - m_1)^2 - m_2^2 \right).$$

Hieruit volgt:

$$E_{K,1} = \frac{c^2}{2M} \cdot (M - m_1 + m_2) \cdot (M - m_1 - m_2)\,.$$

Vanwege de symmetrie kunnen we voor deeltje 2 schrijven:

$$E_{K,2} = \frac{c^2}{2M} \cdot (M - m_2 + m_1) \cdot (M - m_2 - m_1)\,.$$

Voor de verhouding van de kinetische energieën van deeltje 1 en deeltje 2 geldt dan:

$$\frac{E_{K,1}}{E_{K,2}} = \frac{M - m_1 + m_2}{M - m_2 + m_1}$$

Als Δm de afname van de totale massa is, geldt: $\Delta m = M - m_1 - m_2$.

Hieruit volgt:

$$\frac{E_{K,1}}{E_{K,2}} = \frac{2m_2 + \Delta m}{2m_1 + \Delta m} = \frac{m_2 + \Delta m / 2}{m_1 + \Delta m / 2}$$

e.

Leg uit dat in het geval van lage snelheden van de deeltjes 1 en 2 deze formule vereenvoudigd kan worden tot:

$$\frac{E_{K,1}}{E_{K,2}} = \frac{m_2}{m_1}\,.$$

Uitwerkingen

a.

$$p_1 = p_2$$

$$p_1^2c^2 = p_2^2c^2$$

$$E_1^2 - m_1^2c^4 = E_2^2 - m_2^2c^4$$

$$E_2^2 = E_1^2 - m_1^2c^4 + m_2^2c^4$$

b.

$$E_M = E_1 + E_2$$

$$E_2 = E_M - E_1$$

$$E_2^2 = E_M^2 + E_1^2 - 2E_ME_1$$

c.

$$E_1^2 - m_1^2c^4 + m_2^2c^4 = E_M^2 + E_1^2 - 2E_ME_1$$

Hieruit volgt:

$$-m_1^2c^4 + m_2^2c^4 = E_M^2 - 2E_ME_1$$

Substitutie van $E_M = Mc^2$ en $E_1 = \dfrac{m_1c^2}{\sqrt{1-\dfrac{v_1^2}{c^2}}}$ geeft:

$$\frac{2Mc^2m_1c^2}{\sqrt{1-\dfrac{v_1^2}{c^2}}} = M^2c^4 + m_1^2c^4 - m_2^2c^4 .$$

Delen door c^4 geeft:

$$\frac{2Mm_1}{\sqrt{1-\dfrac{v_1^2}{c^2}}} = M^2 + m_1^2 - m_2^2$$

d.

$$E_{K,1} = \frac{m_1c^2}{\sqrt{1-\dfrac{v_1^2}{c^2}}} - m_1c^2 = \frac{c^2}{2M}\cdot\left(M^2 + m_1^2 - m_2^2\right) - m_1c^2$$

e.

Bij lage snelheden is de massa-afname Δm verwaarloosbaar in teller en noemer.